Примена комплексних бројева у решавању геометријских задатака

Задатак 1. *У унутрашњости задатог правилног n-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ одредити геометријско место тачака M за које важи*

$$\measuredangle MA_1A_2 + \measuredangle MA_2A_3 + \cdots + \measuredangle MA_{n-1}A_n + \measuredangle MA_nA_1 = \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

Решење. Одговор: тражено геометријско место тачака чине све тачке које леже на некој оси симетрије задатог многоугла, и притом се налазе у његовој унутрашњости.

Нека је M тачка са наведеном особином. Поставимо посматрани n-тоугао у комплексну раван, на такав начин да темену A_i одговара комплексан број ε^i, за $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, а тачки M одговара комплексан број m. Означимо $P(x) = x^n - 1$; приметимо, како су бројеви ε^1, ε^2, $\ldots$, ε^n тачно сви n-ти корени броја 1, следи

$$P(x) = x^n - 1 = (x-\varepsilon^1)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^n).$$

Нека су T, A и B три различите тачке у комплексној равни, којима одговарају комплексни бројеви t, a и b, и притом важи $|a| = |b| = 1$. Ако означимо $\varphi = \measuredangle BAT$, важи $\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} \in \mathbb{R}$, тј.

$$\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} = \overline{\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}}} = \frac{\overline{t}-\overline{a}}{(\overline{b}-\overline{a})e^{-i\varphi}},$$

те коришћењем $\overline{a} = \frac{1}{a}$ и $\overline{b} = \frac{1}{b}$ налазимо

$$t-a = e^{2i\varphi}\frac{b-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\left(\overline{t}-\frac{1}{a}\right) = -e^{2i\varphi}ab\left(\overline{t}-\frac{1}{a}\right).$$

Отуда, ако означимо $\varphi_j = \measuredangle A_{j+1}A_jM$ за $j = 1,2,\ldots,n$ (идентификујемо $A_{n+1} \equiv A_1$), имамо, за све j,

$$m - \varepsilon^j = -e^{2i\varphi_j}\varepsilon^j\varepsilon^{j+1}(\overline{m} - \varepsilon^{n-j}).$$

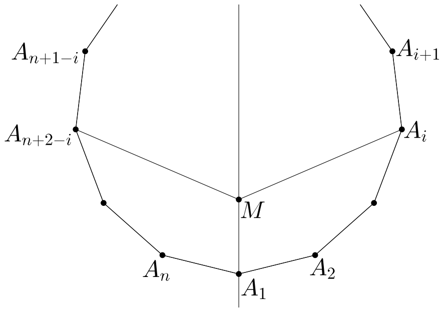
Множењем свих ових једнакости добијамо:

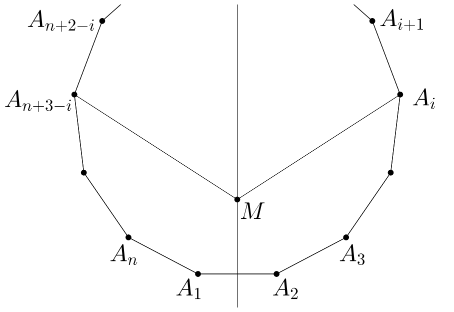
$$P(m) = (-1)^n e^{2i\sum_{j=1}^n \varphi_j}\varepsilon^{n(n+2)}P(\overline{m}).$$

Одавде, како имамо (према услову задатка) $\sum_{j=1}^n \varphi_j = \frac{(n-2)\pi}{2}$ и $\varepsilon^n = 1$, следи

$$P(m) = (-1)^n e^{i(n-2)\pi}P(\overline{m}) = (-1)^n(-1)^{n-2}P(\overline{m}) = P(\overline{m}).$$

Дакле, ако тачка M задовољава услове задатка, онда важи $m^n = \overline{m}^n$. За $m = 0$ услов је свакако испуњен, а за $m \neq 0$ имамо $m = |m|e^{i\varphi}$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi)$, и онда $1 = (\frac{m}{\overline{m}})^n = e^{2in\varphi} = 1$. Из последње једнакости, имајући на уму $\varphi \in [0, 2\pi)$, добијамо $\varphi = \frac{k\pi}{n}$ за неко k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.





Овим смо доказали да тачка M лежи на једној од оса симетрије задатог n-тоугла.

Докажимо сада да свака тачка са осе симетрије задатог n-тоугла, која је притом у његовој унутрашњости, задовољава наведени услов. Нека је најпре тачка M на оси симетрије која пролази кроз неко теме n-тоугла. Без умањења општости, можемо узети да та оса симетрије пролази кроз тачку A_1. Тада имамо $\measuredangle MA_iA_{i+1} = \measuredangle MA_{n+2-i}A_{n+1-i}$ за све i, $i = 1, 2, \ldots, n$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+2-i}A_{n+1-i}$, а с друге стране, приметимо да је збир свих углова и на левој и на десној страни ове једнакости укупно једнак збиру свих углова у датом n-тоуглу, тј. $(n-2)\pi$. Одавде директно добијамо $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$, што је и требало доказати. Слично, ако је M на оси симетрије која је симетрала неке странице, без умањења општости можемо узети да је то страница A_1A_2. Тада имамо $\measuredangle MA_iA_{i+1} = \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, а збир леве и десне стране опет износи $(n-2)\pi$, па поново следи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$. Тиме је задатак решен. $\square$